Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato X

DOCENTE: PROF. PIERPAOLO ESPOSITO

TUTORI: A. MAZZOCCOLI, M. NANNI

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1.Studiare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+6x-3}}{\ln x} :$$

Risolviamo:

$$\begin{cases} x^2+6x-3 \geq 0 \\ x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$$

Da cui $x \geq -3+2\sqrt{3}$ e $x \neq 1$.

$$g(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$$

Risolviamo:

$$\begin{cases} \ln\frac{x-1}{x} \geq 0 \\ \frac{x-1}{x} \neq 0 \end{cases}$$

Da cui $x < 0$.

$$h(x) = \sqrt{2\sin x + 1} :$$

Risolviamo $2\sin x + 1 \geq 0$, da cui $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$i(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

Semplicemente, imponiamo $x^2-3x+2 \neq 0$, da cui $x \neq 2 \wedge x \neq 1$.

$$j(x) = \frac{x^{\sin x}+1}{e^{\sin x}-1}$$

$x^{\sin x}$ si può scrivere come $e^{\sin x \ln x}$ dunque è definita per $x > 0$. Inoltre dev'essere $e^{\sin x} - 1 \neq 0$ e dunque $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

ESERCIZIO 2.Calcolare i seguenti limiti.

$$\circ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} =_{x=\sin y}= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

$$\circ \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\ln(1+\sin^4 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\ln(1+\sin^4 x)} \cdot x^4 x^4 = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2}{\ln(1+\sin^4 x)} \cdot \frac{x^4 \sin^4 x}{\sin^4 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 \cdot \frac{x^4}{\sin^4 x} \cdot \frac{\sin^4 x}{\ln(1+\sin^4 x)} = \frac{1}{4}.$$

$$\circ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} - 1 + \cos x = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}) = +\infty.$$

$$\circ \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2 \sin x + \sin^2 x}{x^4 + x^3 + x \sin x} \approx \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^3 + x^2}{x^4 + x^3 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(+2x+1)}{x^2(x^2+x+1)} = 1.$$

$$\circ \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln((\cos x - 1) + 1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln((\cos x - 1) + 1)}{x^2} \cdot \frac{(\cos x - 1)}{(\cos x - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\circ \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x\tan x} - \frac{1}{x \sin x}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\cos x}{x \sin x} - \frac{1}{x\sin x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} = -\frac{1}{2}.$$

<u>Esercizio 3.</u> Studiare la continuità delle seguenti funzioni definite a tratti.

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{|x|} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(2x-1) & 0 < x < 1 \\ 1 + \sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$$

Tutte e tre le componenti di $f(x)$ sono continue nell'insieme di definizione. Non resta che studiare la continuità in $x = 0$ e in $x = 1$.
In $x = 0$ è continua:

$$\lim_{x\to 0^-} -\sqrt{|x|} = 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(2x-1)$$

In $x = 1$ è continua:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(2x-1) = 1 = \lim_{x\to 1^+} 1 + \sqrt{x-1}.$$

$f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} \alpha & x = 0 \\ \frac{1}{x}\left[\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}} - 1\right] & x \in (0,1) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \beta x & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Le tre componenti di $g(x)$ sono continue nell'insieme di definizione. Calcoliamo innanzitutto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left[\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}} - 1\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+1}} - 1\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x}\left[\frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+1} - 1\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{4x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{8x} = \frac{1}{4}.$$

Dunque perché $g(x)$ sia continua in $x = 0$ dovremo richiedere che $\alpha = \frac{1}{4}$. Allo stesso modo, poiché $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x}\left[\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}} - 1\right] = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} - 1$ e $\lim_{x\to 1^+} \beta x = \beta$, per la continuità in $x = 1$ dovremo richiedere $\beta = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} - 1$.

<u>Esercizio 4.</u> Descrivere l'immagine sul dominio C per ognuna delle seguenti funzioni.

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad C = (0, 1)$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $f(1) = 0$ e inoltre $f(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo considerato. Dunque $f(C) = (-\infty, 0)$.

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad C = (1, 2]$$

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$, $g(2) = \frac{5}{3}$ e inoltre $g(x)$ è strettamente decrescente nell'intervallo considerato. Dunque $g(C) = [\frac{5}{3}, +\infty)$.

$$h(x) = \ln \frac{x}{x + 2} \quad C = (0, +\infty)$$

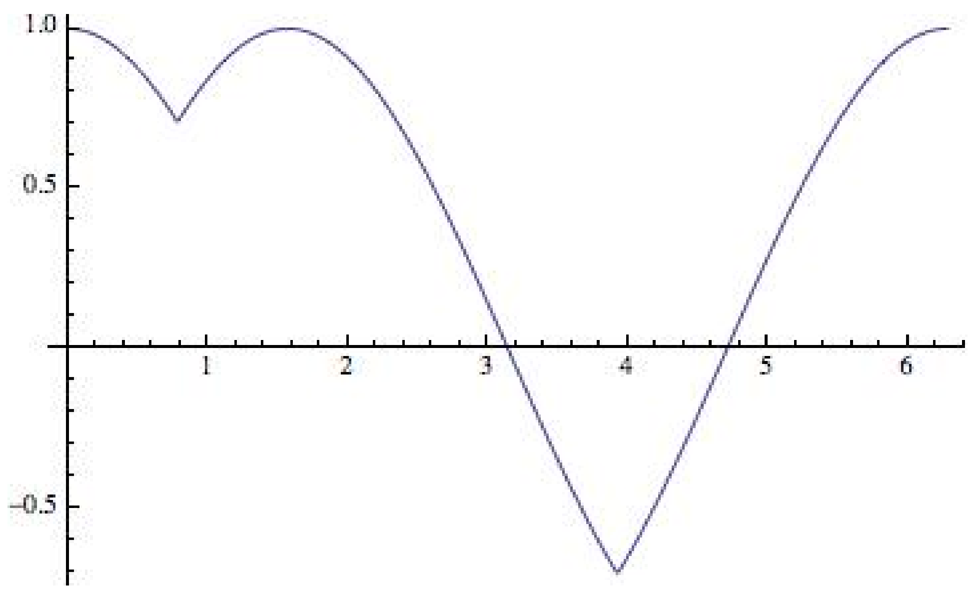
$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} h(x) = 0$. Per cui, poiché inoltre $h(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo considerato, avremo $h(C) = (-\infty, 0)$.

$$i(x) = |x - 1| \quad C = [0, 5]$$

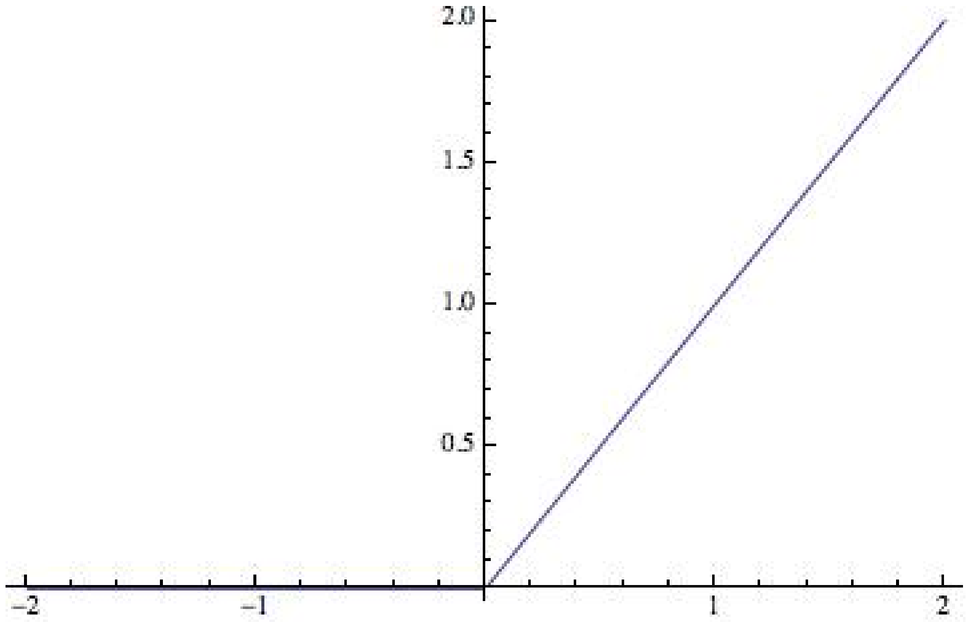
È evidente che $i(C) = [0, 4]$.

<u>Esercizio 5.</u> Disegnare il grafico delle seguenti funzioni.

$$f(x) = \max(\sin x, \cos x) :$$



$$g(x) = \frac{x + |x|}{2} :$$



$$h(x) = \min\left(\frac{1}{x^4}, x^2\right) :$$